I - ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

A. Système du premier ordre

1. Définition

On appelle système du premier ordre, tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre:

$$\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

avec τ: constante de temps >0;
K: gain statique

2. Fonction de transfert

On pose: $e(t)\xrightarrow{L}E(p)$ et. $s(t)\xrightarrow{L}S(p)$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient:

$\tau\cdot pS(p)+S(p)=K.E(p)$

d'où la fonction de transfert:

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau\cdot p}$$

3. Schéma bloc:

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante.

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1+\tau\cdot p}} \longrightarrow S(p)$$

4. Etude temporelle

a) Réponse à un échelon . $e(t)=E_0\cdot u(t)$ pour $t>0$

(1) Résolution de l'équation de différentielle

L'équation différentielle est donc la suivante.
$$\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.E_0$$

La solution est de la forme pour un système partant du repos:
$$s(t)=K\cdot E_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

(2) Résolution par les propriétés de la transformée de Laplace

$S(p)=H(p).E(p)$ donc $S(p)=\dfrac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\dfrac{E_0}{p}$

Etude de la réponse s(t)

<u>Théorème de la valeur finale pour s(t)</u>

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot S(p)$$

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{E_0}{p}$$

valeur finale $\boxed{\lim_{t\to\infty} s(t)=\lim_{p\to 0}\frac{KE_0}{1+\tau\cdot p}=K.E_0}$

<u>Théorème de la valeur finale pour s'(t)</u>

$$\lim_{t\to\infty} s'(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot\left(p\cdot S(p)\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} s'(t) = \lim_{p\to 0} p^2\cdot S(p)$$
$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p^2\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{E_0}{p}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{KE_0}{1+\tau\cdot p} = 0}$$

Le système à donc une asymptote horizontale

<u>Théorème de la valeur initiale pour s(t)</u>

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot S(p)$$
$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{E_0}{p}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty}\frac{K.E_0}{1+\tau\cdot p} = 0}$$

<u>Théorème de la valeur initiale pour s'(t)</u>

$$\lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{p\to\infty} p^2\cdot S(p)$$
$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty} p^2\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{E_0}{p}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot\frac{KE_0}{1+\tau\cdot p} = \frac{K}{\tau}E_0}$$

La pente à l'origine est non nulle

b) Temps de réponse

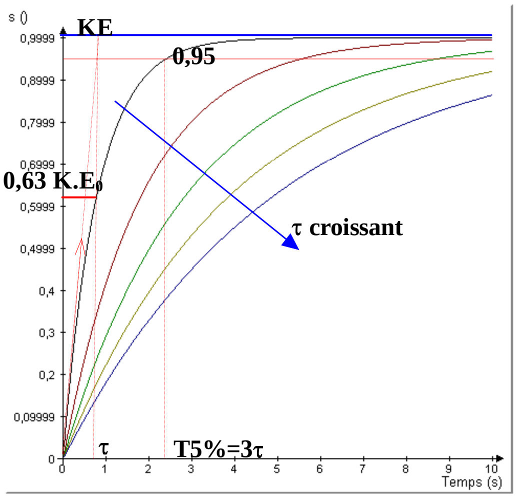
Le temps de réponse à 5% est défini comme le temps mis pour atteindre la valeur finale à ±5% près. Donc :

$$\frac{s(\infty)-s(t)}{s(\infty)} = 5\% = \frac{KE_0 - K\cdot E_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{KE_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

donc $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.05$ d'ou $T_{5\%} = 3\cdot\tau$

c) Allure de la réponse temporelle

Réponse pour K=1 et E_0=1 pour différentes valeurs de la constante de temps



Temps de réponse à 5%

$T_{5\%} = 3\cdot\tau$

Pente à l'origine

$\frac{K}{\tau}E_0$

valeur particulière pour $t = \tau$

$s(t) = 63\% K\cdot E_0$

B.

Système du second ordre

1. Définition

On appelle système du second ordre tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du second ordre.

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_1 . e(t)$$

soit sous la forme canonique

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n{}^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)}$$

avec ω_n : Pulsation propre du système non amorti
K gain statique
z (ou ξ) facteur d'amortissement

2. Fonction de transfert:

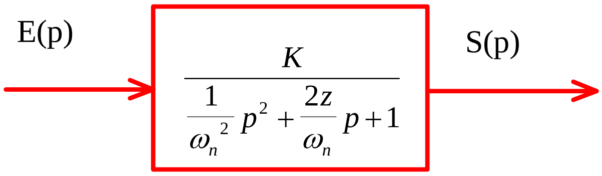
Dans les conditions d'Heaviside (s(0)=0, s'(0)=0).

$$\frac{1}{\omega_n{}^2} p^2 S(p) + \frac{2z}{\omega_n} pS(p) + S(p) = K.E(p) \text{ donc} \left(\frac{1}{\omega_n{}^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1\right) S(p) = K.E(p)$$

donc la fonction de transfert est:

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n{}^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1}}$$

3. Schéma bloc



4. Etude temporelle

a) Réponse à un échelon unité

$$S(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n{}^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1} \cdot E(p) \text{ avec } e(t) = E0.u(t) \quad , E(p) = L(E_0) = \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{KE_0}{\left(\frac{1}{\omega_n{}^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1\right).p}$$

Cas 1 si z>1
2 poles réels
Régime apériodique

$$r_1 = \omega_n\left(-z - \sqrt{z^2 - 1}\right) \text{ et } r_2 = \omega_n\left(-z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Cas 2 si z=1
pôle double
Régime apériodique critique

$$r = -\omega_n$$

cas 3 si z<1
2 poles complexes conjugués
Régime oscillatoire amorti

$$r_1 = \omega_n\left(-z - i\sqrt{1 - z^2}\right) \text{ et } r_2 = \omega_n\left(-z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$$

b) Cas 1: z>1 régime apériodique:

2 racines réelles au dénominateur, on peut donc décomposer la fonction de transfert en éléments simples.

on pose:: $\tau_1 = \dfrac{1}{\omega_n\left(-z-\sqrt{z^2-1}\right)}$, $\tau_2 = \dfrac{1}{\omega_n\left(-z+\sqrt{z^2-1}\right)}$

La fonction de transfert s'écrit $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{\dfrac{1}{\omega_n{}^2}p^2 + \dfrac{2z}{\omega_n}p+1} = \dfrac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

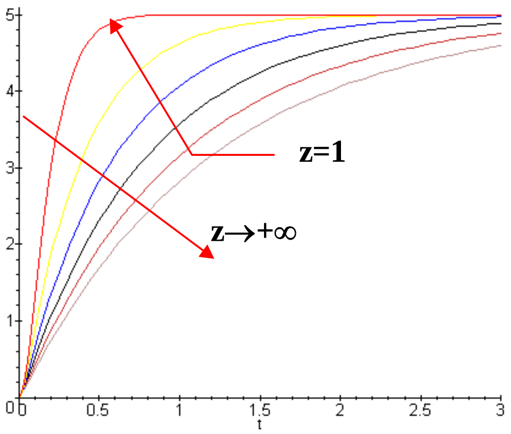
d’ou la décomposition en fractions simples: $\dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{\tau_1-\tau_2}\left(\dfrac{\tau_1}{1+\tau_1 p} - \dfrac{\tau_2}{1+\tau_2 p}\right)$.

Cette forme nous permet de rechercher dans la table des transformées inverses la fonction s(t) pour

$e(t) = E_0 u(t)$ donc $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$.

$$S(p) = \frac{KE_0}{\tau_1-\tau_2}\left(\frac{\tau_1}{p(1+\tau_1 p)} - \frac{\tau_2}{p(1+\tau_2 p)}\right)$$

d'où $s(t) = \dfrac{KE_0}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - \tau_2\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)$



Le comportement du système est non oscillant il tend vers la valeur K sans jamais la dépasser. La tangente à l'origine est nulle.
Plus le coefficient d’amortissement z est grand plus le temps de réponse est important.
La réponse temporelle ne dépasse pas la valeur finale.
La propriété de non dépassement est très recherché dans certains asservissements ou le dépassement est interdit.

c) cas z=1 régime apériodique critique

Une racine double $r = -\omega_n$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n{}^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_n}p+1} = \frac{K}{(1+\frac{p}{\omega_n})^2} = \frac{K}{(1+\tau p)^2}$$

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau p)^2}E(p)$$

Pour $e(t) = E_0 u(t)$, on a $S(p) = \dfrac{K}{p(1+\tau p)^2}$.

Décomposition en éléments simples $S(p) = \dfrac{KE_0}{p(1+\tau p)^2} = KE_0\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{\tau}{1+\tau p} - \dfrac{\tau}{(1+\tau p)^2}\right]$

d'où la fonction temporelle $s(t) = KE_0\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

La réponse est non oscillante, pour un gain statique et une pulsation propre donnée, c'est le régime apériodique le plus rapide.

d) cas 3 z<1 régime oscillatoire

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_n}p + 1}$$

$S(p) = \dfrac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_n}p + 1}E(p)$ pour e(t)=u(t) on a $S(p) = \dfrac{KE_0}{p\left(\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_n}p + 1\right)}$

La transformation inverse nous donne $s(t) = KE_0\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_n t}.\left(\sin\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}.t-\varphi\right)\right)\right]$ avec

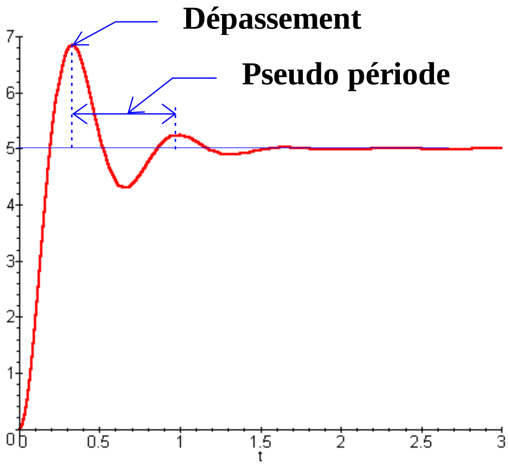
$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$$

La réponse présente la forme d'une sinusoïde amortie de pseudo - période $T_{pa} = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-z^2}}$ .on appelle pseudo - pulsation : $\omega_{pa} = \omega_n\sqrt{1-z^2}$.

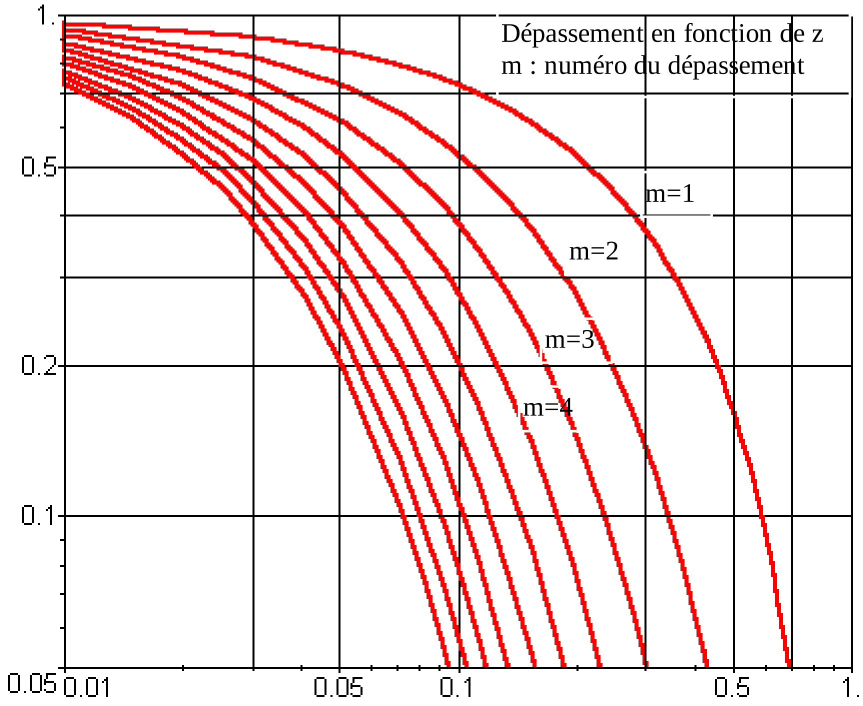
Le dépassement est un critère important pour un asservissement: L'instant du premier dépassement est

$$T_{pm} = \frac{T_{pa}}{2} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-z^2}}.$$

$$s(T_{pa}) = KE_0\left[1+e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\right]$$



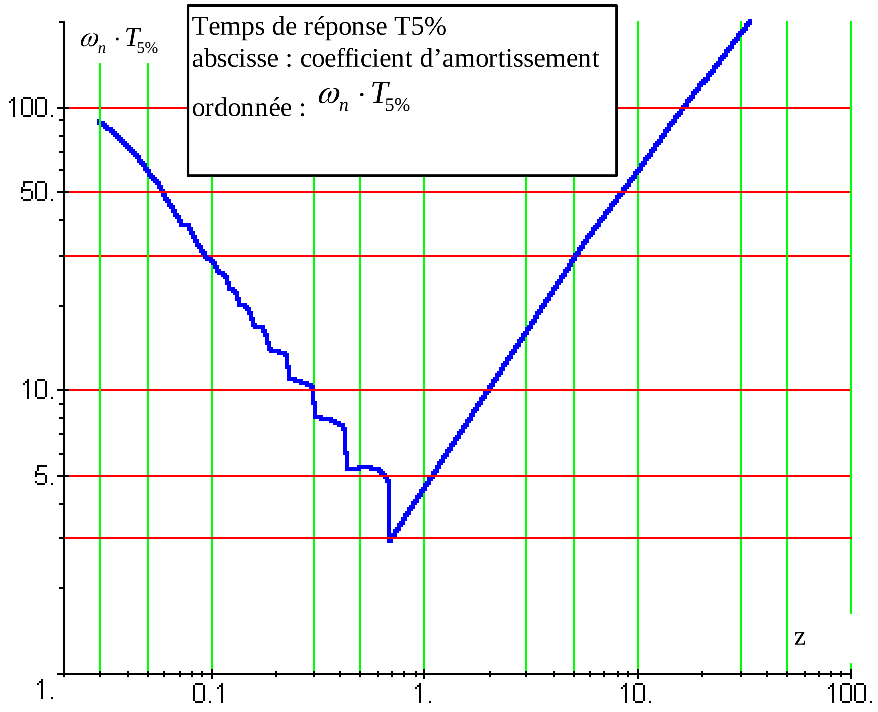
Le dépassement est donc $d = \dfrac{D}{V_F - V_I} = \dfrac{KE_0(1+e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}) - KE_0}{KE_0 - 0}$ $d = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$



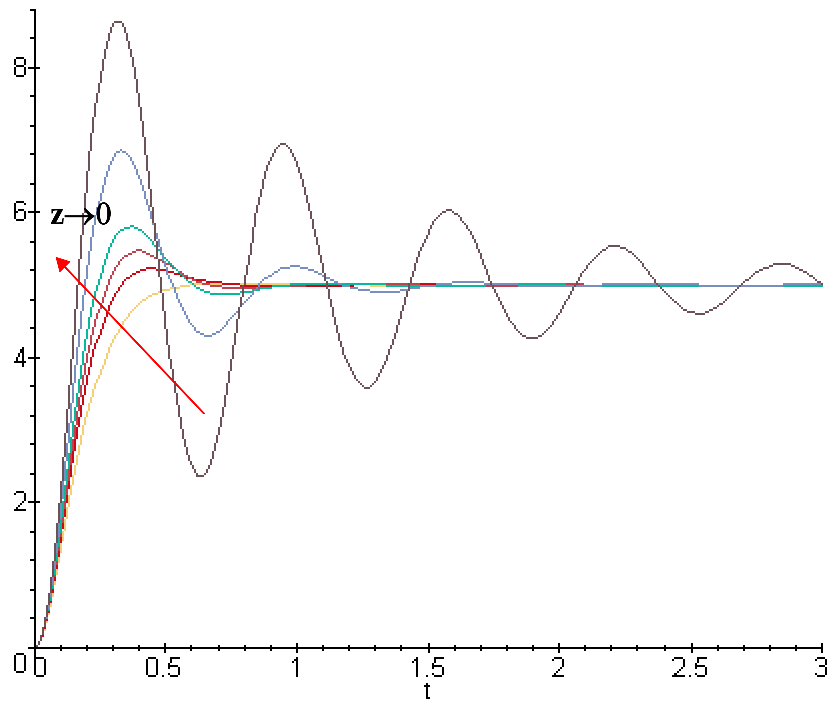
e) Temps de réponse T5%

L'abaque suivante donne le temps de réponse à 5% pour un système du second ordre.
On constate sur cette abaque deux parties :
pour z>0,7, le temps de réponse augmente lorsque z augmente ;
pour z<0,7, le temps de réponse augmente lorsque z diminue.
Le temps de réponse est minimal pour z= 0,7.

L'abaque donne $\omega_n . T_{5\%}$ en fonction de z.



Allure de la réponse temporelle en fonction de z



Plus z est petit moins la réponse est amortie (z=0 réponse sinusoïdale non amortie).
Pour z=0.7 le temps de réponse est minimum.
La tangente à l'origine est nulle.